# Die Schar der Funktionen $f_a$ mit $f_a(x) = (ax-1)e^{ax}$

Alfred Reich
Ludwigsgymnasium Straubing

4. Oktober 2011

Gegeben ist - vergleiche auch delta 12, C.C.Buchner, Seite 14/8 - die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto (ax-1) \cdot e^{ax} \quad \text{mit } \mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R} \text{ und dem Parameter } a > 0.$$

$G_a$ bezeichne den Graphen von $f_a$.

Aufgabe.
a) Bestimme alle Nullstellen von $f_a$.
b) Bestimme das Verhalten von $f_a$ an den Rändern des Definitionsbereichs.
c) Zeige, dass der Graph $G_a$ von $f_a$ genau einen Extrempunkt besitzt und bestimme dessen Art und Lage.
d) Zeige, dass $G_a$ genau einen Wendepunkt besitzt und bestimme dessen Lage.
e) Zeichne $G_a$ für $a = 0{,}8$, $a = 1$, $a = 1{,}5$ und $a = 2$.
f) Zeige, dass für jedes $a > 0$

$$F_a : x \mapsto \left(x - \frac{2}{a}\right)e^{ax} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion von $f_a$ ist.
g) $G_a$ schließt mit der $x$-Achse ein ganz unterhalb der $x$-Achse liegendes Flächenstück ein. Berechne dessen Inhalt $\mathrm{A}_a$.

Lösung.
a) Wegen $e^{ax} > 0$ für alle $a$ und alle $x$ gilt:

$$f_a(x) = 0 \Leftrightarrow ax - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}.$$

Also hat $f_a$ genau eine Nullstelle, nämlich $x = \frac{1}{a}$.

b) Ein Grenzwert läßt sich sofort angeben.

$$\lim_{x \to \infty} f_a(x) = \infty \quad \text{(sowieso)}.$$

Für die Berechnung des zweiten Grenzwerts verwenden wir die Regel von l'Hospital.

$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{ax - 1}{e^{-ax}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{-ae^{-ax}} = \lim_{x \to -\infty} (-e^{ax}) = 0.$$

c) Wegen

$$f_a'(x) = (ax - 1) \cdot ae^{ax} + e^{ax} \cdot a = a^2xe^{ax}$$

und $a^2 >$ und $e^{ax} > 0$ gilt:

$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Mit

$$f_a''(x) = a^2(x \cdot ae^{ax} + e^{ax} \cdot 1) = a^2e^{ax}(ax + 1)$$

folgt insbesondere:

$$f_a''(0) = a^2 > 0.$$

Nach dem Erkennungsmerkmal für besondere Graphenpunkte folgt also, dass T$(0\,|-1)$ einziger Extrempunkt von $G_a$ (und zwar ein Tiefpunkt) ist. Insbesondere folgt, dass T$(0\,|-1)$ ein gemeinsamer Punkt aller $G_a$ ist.

d) Wegen

$$f_a''(x) = a^2e^{ax}(ax + 1) \quad \text{und} \quad a^2e^{ax} > 0$$

folgt:

$$f_a''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{a}.$$

Also kann $G_a$ höchstens einen Wendepunkt haben. Mit

$$f_a'''(x) = a^3e^{ax}(ax + 2)$$

folgt insbesondere:

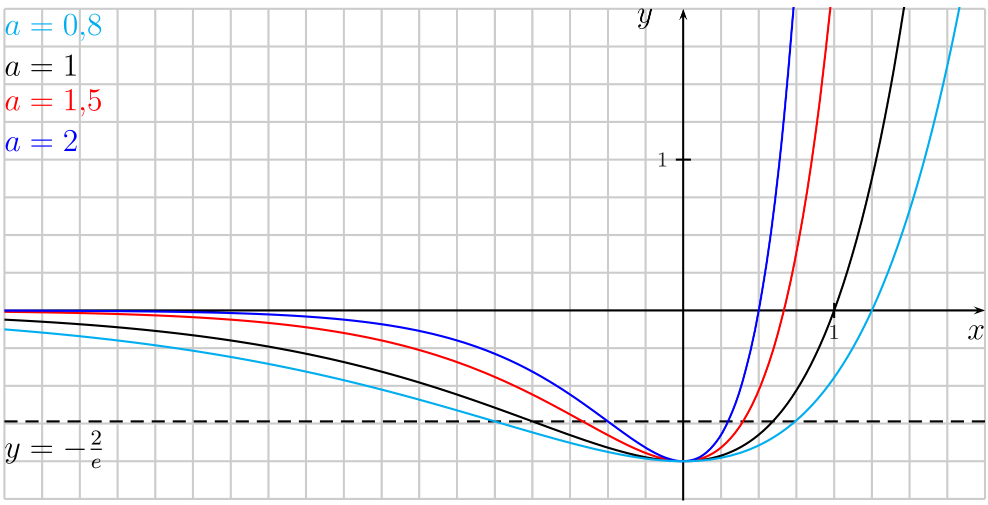
$$f_a'''\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{a^3}{e} > 0.$$

Nach dem Erkennungsmerkmal für besondere Graphenpunkte ist

$$\mathrm{W}_a\left(-\frac{1}{a}\middle| f_a\left(-\frac{1}{a}\right)\right) = \mathrm{W}_a\left(-\frac{1}{a}\middle| -\frac{2}{e}\right)$$

einziger Wendepunkt von $G_a$.
Insbesondere liegen alle Wendepunkte auf der Parallelen zur $x$-Achse mit der Gleichung $y = -\frac{2}{e}$.

e) Wir wählen: $x$-Achse: 1 LE $\widehat{=}$ 2 cm
$y$-Achse: 1 LE $\widehat{=}$ 2 cm




f) Einfaches Ausrechnen ergibt:

$$F_a'(x) = \left(x - \frac{2}{a}\right) a e^{ax} + e^{ax} \cdot 1 = e^{ax}(ax - 1) = f_a(x).$$

g) Weil das Flächenstück unterhalb der $x$-Achse liegt, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_a &= \lim_{\alpha \to -\infty} \left( - \int_{\alpha}^{a^{-1}} f_a(x)\, dx \right) \\
&= - \lim_{\alpha \to -\infty} \Big( F_a(a^{-1}) - F_a(\alpha) \Big) \\
&= -F_a(a^{-1}) + \lim_{\alpha \to -\infty} F_a(\alpha) \\
&= \frac{e}{a} + \lim_{\alpha \to -\infty} \left( e^{\alpha a} \left( \alpha - \frac{2}{a} \right) \right) \\
&= \frac{e}{a} + 0 \\
&= \frac{e}{a}.
\end{aligned}$$