

Drehen des Graphen einer Exponentialfunktion

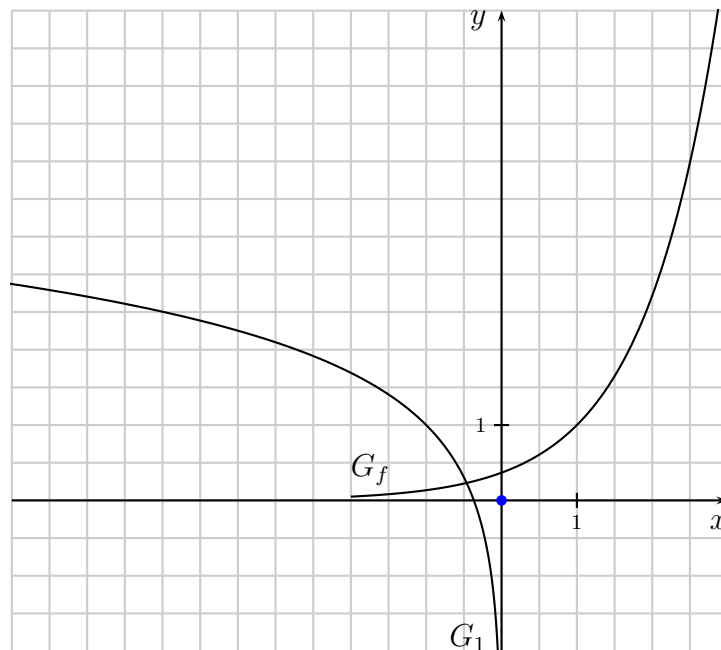
Alfred Reich
Ludwigsgymnasium Straubing

21. Juli 2011

Gegeben sind die Funktion $f : x \mapsto e^{x-1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und ihr Graph G_f .

Aufgabe. G_f wird um den Ursprung um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Das Bild G_1 von G_f bei dieser Drehung ist Graph einer Funktion f_1 . Welcher? Zeichne G_f und G_1 .

Lösung.

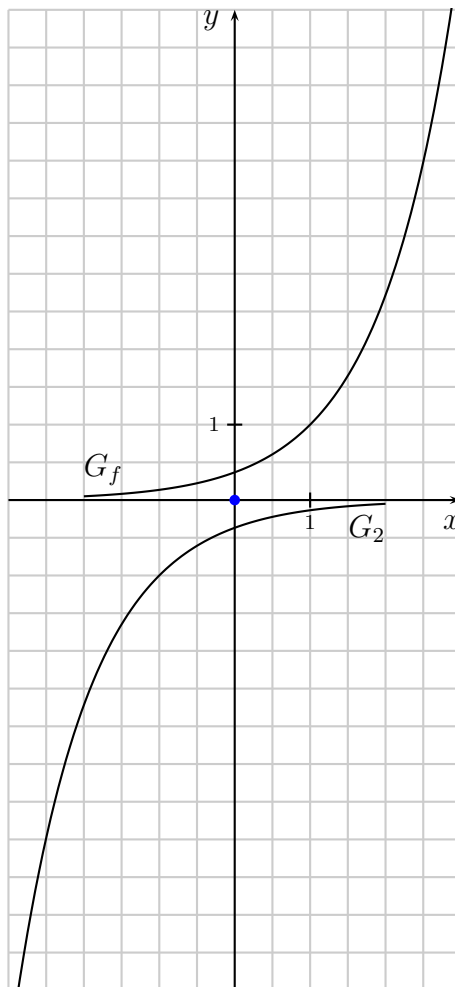


Wenn wir G_1 um -1 längs der y -Achse verschieben und anschließend an der y -Achse spiegeln, so erhalten wir den Graphen der \ln -Funktion. Also gilt:

$$f_1 : x \mapsto 1 + \ln(-x) \quad \text{mit } \mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 0[.$$

Aufgabe. G_f wird um den Ursprung um 180° gedreht. Das Bild G_2 von G_f bei dieser Drehung ist Graph einer Funktion f_2 . Welcher? Zeichne G_f und G_2 .

Lösung. Weil wir um 180° drehen, spielt es keine Rolle, ob wir im oder gegen den Uhrzeigersinn drehen. Außerdem ist eine Drehung um 180° gleichbedeutend mit einer Punktspiegelung (am Drehzentrum).



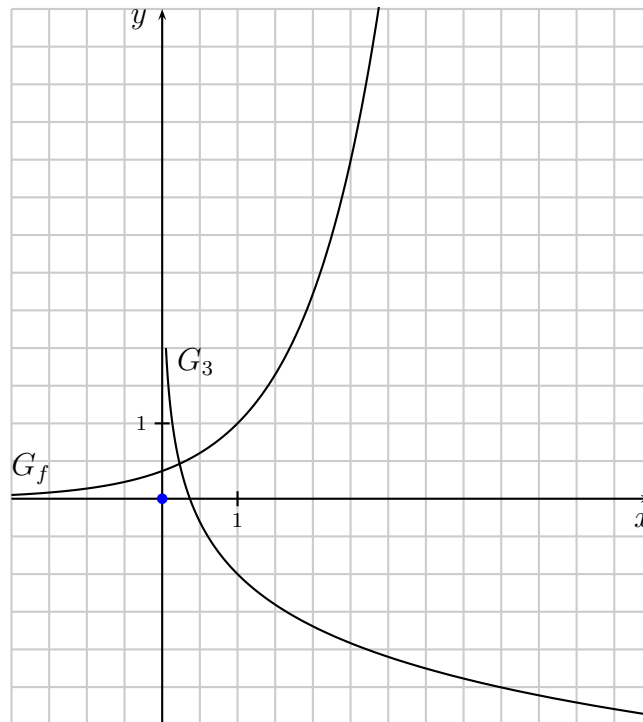
Wir erkennen, dass wir G_f zuerst an der x -Achse und anschließend an der y -Achse spiegeln können, um G_2 zu erhalten. Also gilt:

$$f_2 : x \mapsto -e^{-x-1} = -\frac{1}{e^{x+1}} \quad \text{mit } \mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{R}.$$

Hinweis. Natürlich hätten wir G_f auch zuerst an der y -Achse und anschließend an der x -Achse spiegeln können, um G_2 zu erhalten.

Aufgabe. G_f wird um den Ursprung um 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Das Bild G_3 von G_f bei dieser Drehung ist Graph einer Funktion f_3 . Welcher? Zeichne G_f und G_3 .

Lösung.



Wenn wir G_3 zuerst um 1 längs der y -Achse verschieben und anschließend an der x -Achse spiegeln, so erhalten wir den Graphen der \ln -Funktion. Also gilt:

$$f_3 : x \mapsto -1 - \ln x \quad \text{mit } \mathbb{D}_{f_3} =]0; \infty[.$$

Aufgaben (für später). (1) G_f und die Koordinatenachsen schließen ein im II. Quadranten liegendes, sich „ins Unendliche erstreckende“ Flächenstück ein. Welchen Inhalt hat es?

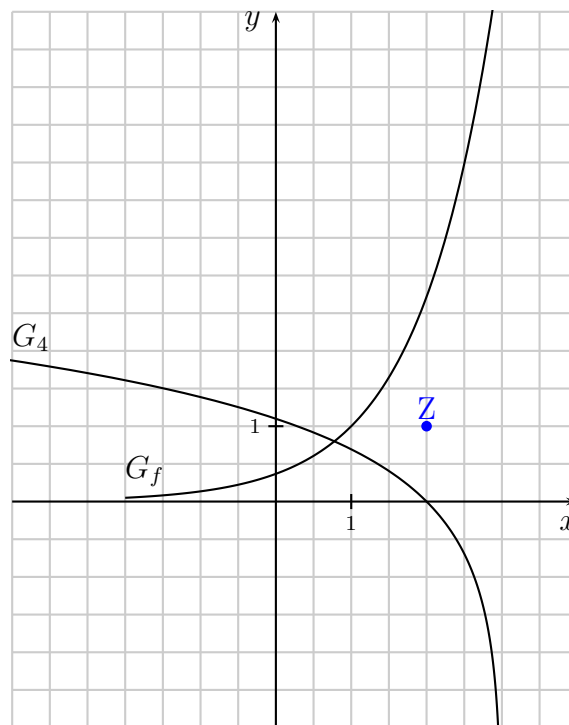
(2) G_f , G_3 und die Koordinatenachsen schließen ein im I. Quadranten liegendes endliches Flächenstück ein. Welchen Inhalt hat es?

Hinweis. Wir werden diese Aufgaben mit Hilfe von Integralen (bald) lösen.

Aufgabe. G_f wird um den Punkt $Z(2|1)$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Das Bild G_4 von G_f bei dieser Drehung ist Graph einer Funktion f_4 . Welcher? Zeichne G_f und G_4 .

Hinweis. Diese Aufgabe ist etwas anspruchsvoller und erfordert ein kurzes Nachdenken.

Lösung.



- Die Gerade $y = 0$ ist (waagrechte) Asymptote an G_f , also muss die Gerade $x = 3$ (senkrechte) Asymptote an G_4 sein.
- Weil G_f und G_4 als Punktmengen kongruent sind, kommt für f_4 nur eine ln-Funktion in Betracht.
- Der Definitionsbereich von f_4 muss $-\infty < x < 3$ sein.
- Weil $(1|1) \in G_f$, muss $(2|0) \in G_4$ gelten.
- Also haben wir den Ansatz $f_4(x) = a + \ln(3 - x)$ und $f_4(2) = 0$, woraus $a = 0$ folgt.

Insgesamt also

$$f_4 : x \mapsto \ln(3 - x) \quad \text{mit } \mathbb{D}_{f_4} =]-\infty; 3[.$$