Eine Erweiterung des Flächenbegriffs

Alfred Reich (zehnp@gmx.de)

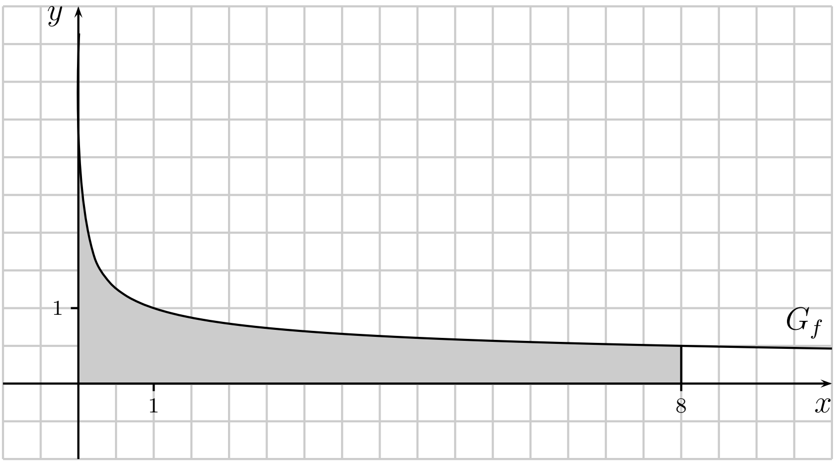
Ludwigsgymnasium Straubing

11. November 2011

Beispiel 1. Die beiden Koordinatenachsen, die Gerade $x = 8$ und der Graph G_f der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$$

schließen ein Flächenstück ein, vergleiche Skizze. Berechne dessen Inhalt A.



$$\begin{aligned} A &= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_a^8 \\ &= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left(6 - \frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Man schreibt

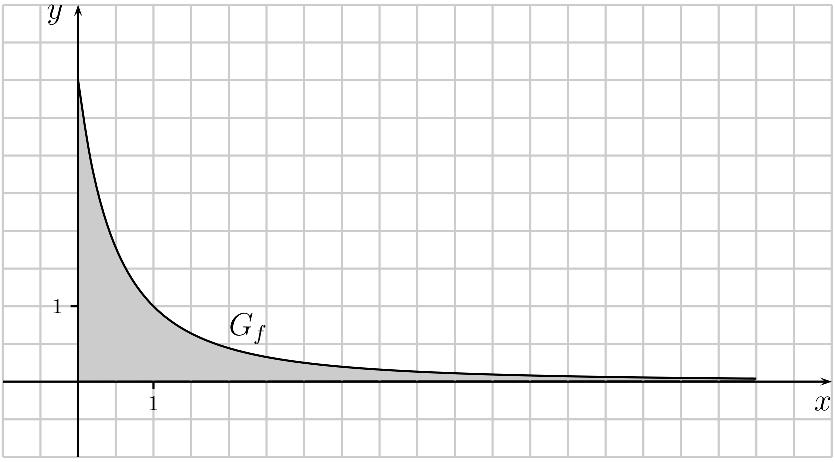
$$\lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =: \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \tag{1}$$

und spricht von einem uneigentlichen Integral mit unterer Grenze 0 und oberer Grenze 8.

Beispiel 2. Der Graph G_f der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{4}{(x+1)^2} \quad \text{mit } \mathbb{D}_f = [\,0, \infty[$$

schließt mit den beiden Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, vergleiche Skizze. Berechne dessen Inhalt A.



$$\begin{aligned} A &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{4\,dx}{(1+x)^2} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{4}{x+1}\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{4}{b+1} + 4\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Man schreibt

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{4\,dx}{(x+1)^2} =: \int_0^\infty \frac{4\,dx}{(x+1)^2} \tag{2}$$

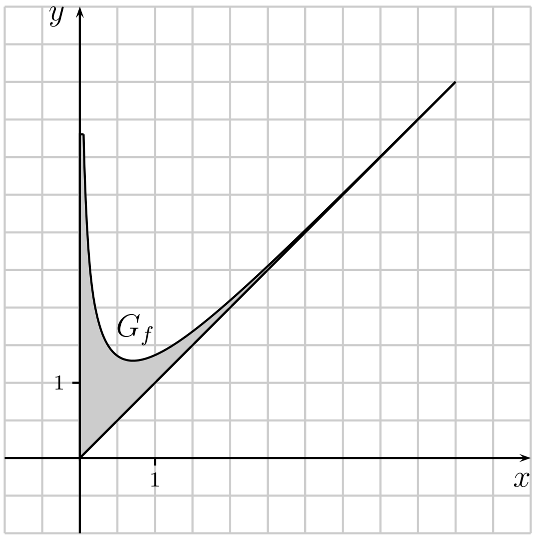
und spricht von einem uneigentlichen Integral mit unterer Grenze 0 und oberer Grenze ∞.

Nachdem die Begriffe nun (halbwegs) geklärt sind, überlegen wir. Viele Funktionen haben einen Graphen mit genau einer senkrechten und genau einer schrägen Asymptote. Ist es möglich, dass ein Graph mit seinen beiden Asymptoten ein Flächenstück endlichen Inhalts einschließt? Eine Antwort gibt das

Beispiel 3. Der Graph G_f der Funktion

$$f : x \mapsto x + \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad \text{mit } \mathbb{D}_f =]\,0, \infty\,[$$

schließt mit der y-Achse und der Geraden $y = x$ ein Flächenstück ein, vergleiche Skizze. Berechne dessen Inhalt A.



Wegen

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} > 0 \text{ für } x > 0 \tag{3}$$

ist $x = 0$ senkrechte und $y = x$ schräge, stets unterhalb G_f liegende Asymptote an G_f. Also gilt:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^1 (f(x) - x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_1^b (f(x) - x)\, dx \\ &= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^1 \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x}} + \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{x}} \\ &= \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei bezeichnet

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{mit } x > 0$$

die so genannte Gammafunktion und (4) folgt aus einem Satz aus der Analysis.