Die Familie $x \mapsto \frac{ae^{bx}}{e^{bx}+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$

Alfred Reich (zehnp@gmx.de)
Ludwigsgymnasium Straubing

27. Juni 2011

Wir betrachten die Familie

$$f_{a,b} : x \mapsto \frac{ae^{bx}}{e^{bx}+1} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und den Parametern } a > 0,\ b > 0.$$

Den Graphen von $f_{a,b}$ bezeichnen wir mit $G_{a,b}$.

Wir notieren uns einige Eigenschaften.

- Einschränkung des Wertebereichs.

$$0 < f_{a,b}(x) < a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

- Symmetrieverhalten. $G_{a,b}$ ist punktsymmetrisch zu $(0 \mid \frac{a}{2})$.

  Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$f(x) - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - f(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

  gilt, was gleichbedeutend ist mit

$$f(x) + f(-x) = a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{ae^{bx}}{e^{bx}+1} + \frac{ae^{-bx}}{e^{-bx}+1} \\ &= \frac{ae^{bx}(e^{-bx}+1) + ae^{-bx}(e^{bx}+1)}{(e^{bx}+1)(e^{-bx}+1)} \\ &= \frac{a + ae^{bx} + a + ae^{-bx}}{1 + e^{bx} + e^{-bx} + 1} \\ &= a. \end{aligned}$$

□

- Verhalten von $f_{a,b}$ an den Rändern des Definitionsbereichs.

$$\lim_{x\to\infty} f_{a,b}(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} f_{a,b}(x) = 0 \tag{4}$$

  Also sind die Geraden $y = 0$ und $y = a$ (waagrechte) Asymptoten von $G_{a,b}$.

- Monotonieverhalten. Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{bx}+1)abe^{bx} - ae^{bx}be^{bx}}{(e^{bx}+1)^2} \\ &= \frac{abe^{bx}(e^{bx}+1-e^{bx})}{(e^{bx}+1)^2} \\ &= \frac{abe^{bx}}{(e^{bx}+1)^2} > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

  Also ist $G_{a,b}$ streng monoton steigend.

- Beziehung zwischen $f'_{a,b}$ und $f_{a,b}$. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{abe^{bx}}{(e^{bx}+1)^2} &= \frac{ae^{bx}}{e^{bx}+1} \cdot b \cdot \frac{(e^{bx}+1)-e^{bx}}{e^{bx}+1} \\ &= f_{a,b}(x) \cdot b \cdot \left(1 - \frac{1}{a} \cdot f_{a,b}(x)\right) \\ &= f_{a,b}(x) \cdot \frac{b}{a} \cdot (a - f_{a,b}(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  folgt mit (5)

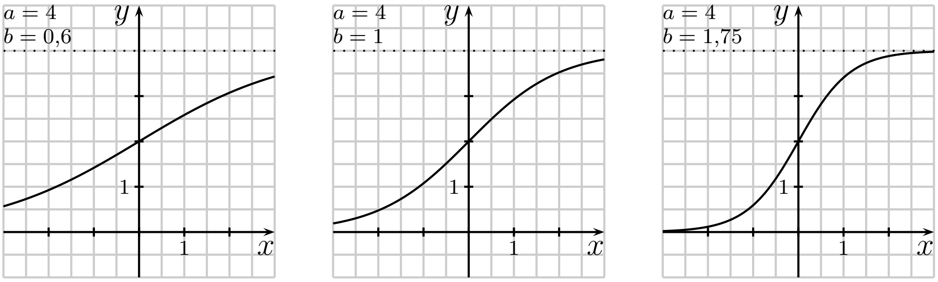
$$f'_{a,b}(x) = \frac{b}{a} \cdot f_{a,b}(x) \cdot (a - f_{a,b}(x)). \tag{6}$$

- Wertebereich $\mathbb{W}_{a,b}$ von $f_{a,b}$. Fassen wir (1) und (4) und (5) zusammen, so erhalten wir

$$\mathbb{W}_{a,b} = \left]0; a\right[. \tag{7}$$

  Insbesondere ist der Wertebereich $\mathbb{W}_{a,b}$ nur von a, nicht aber von b abhängig.

Wir skizzieren $G_{a,b}$ für $a = 4$ und $b = 0{,}6$, $b = 1$ und $b = 1{,}75$.



Zum Schluss wollen wir noch etwas genauer auf die Ableitungsfunktion $f'_{a,b}$ eingehen.

- Wegen (2) muss der Graph $H_{a,b}$ von $f'_{a,b}$ achsensymmetrisch zu $x = 0$ sein, was wir aber auch direkt nachrechnen können:

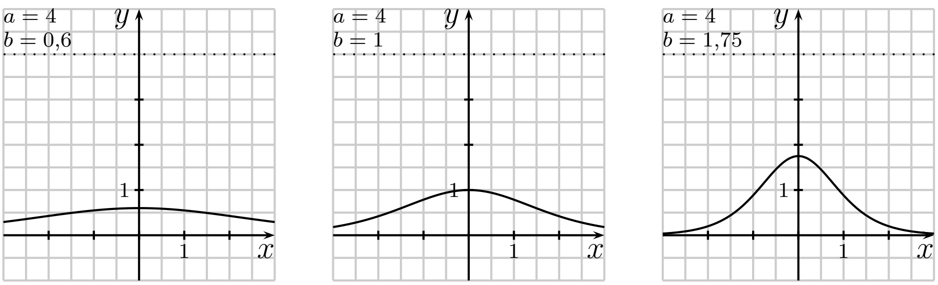
$$f'_{a,b}(-x) \overset{(5)}{=} \frac{b}{a} \cdot f(-x) \cdot (a - f(-x)) \overset{(2)}{=} \frac{b}{a} \cdot (a - f(x)) \cdot f(x) \overset{(5)}{=} f(x). \tag{8}$$

- Es gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'_{a,b}(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'_{a,b}(0) = \frac{ab}{4} > 0. \tag{9}$$

  Ohne Begründung teilen wir mit, dass $H_{a,b}$ im Bereich $-\infty < x \leq 0$ streng monoton steigend und im Bereich $0 \leq x < \infty$ streng monoton fallend ist und der Punkt $(0 \mid \frac{ab}{4})$ Hochpunkt und einziger Extrempunkt von $H_{a,b}$ ist.

Dies wollen wir uns anhand der Graphen $H_{a,b}$ mit $a = 4$ und $b = 0{,}6$, $b = 1$ und $b = 1{,}75$ veranschaulichen.



- Das zwischen der x-Achse und $H_{a,b}$ gelegene Flächenstück hat den Inhalt a. Der Beweis ist einfach, folgt aber erst später.