Flachpunkt - Wendepunkt - Terrassenpunkt

Alfred Reich
Ludwigsgymnasium Straubing

22. September 2011

Sprechweisen: Sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{D}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion (mit dem Graphen G_f) und sei $x_0 \in \mathbb{D}$ mit $f''(x_0) = 0$.

- x_0 heißt Flachstelle von f, wenn f'' in einer Umgebung von x_0 das Vorzeichen nicht ändert, wenn es also eine Umgebung von x_0 gibt, so dass für alle x in dieser Umgebung entweder $f''(x) \geq 0$ oder $f''(x) \leq 0$ gilt.
  Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt dann Flachpunkt von G_f.

- x_0 heißt Wendestelle von f, wenn f'' in x_0 das Vorzeichen ändert, wenn also x_0 eine isolierte Nullstelle von f'' mit ungerader Vielfachheit ist.
  Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt dann Wendepunkt von G_f.

- Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist und zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt, dann heißt x_0 Terrassenstelle von f und $(x_0|f(x_0))$ heißt dann Terrassenpunkt von G_f.

Beispiele.

- Der Graph der Funktion $f : x \mapsto 2x - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ besteht aus lauter Flachpunkten.

- Wenn f eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 ist, also $D_f = \mathbb{R}$ und $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit geeigneten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ gilt, dann ist
  $$x_0 = -\frac{b}{3a}$$
  die einzige Wendestelle von G_f.

- Für die Funktion $f : x \mapsto x^3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist die Wendestelle $x_0 = 0$ sogar Terrassenstelle.

- Für den Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^4$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist $(0|0)$ Tiefpunkt und Flachpunkt.

- Wenn
$$f : x \mapsto -\frac{x^4}{12} + \frac{5x^3}{3} - \frac{25x^2}{2} + \frac{633x}{20} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$
dann ist der Punkt $(5|2)$ (einziger) Flachpunkt von G_f.

  Begründung.
  Wegen
$$f(5) = -\frac{625}{12} + \frac{625}{3} - \frac{625}{2} + \frac{633}{4} = 2$$
gilt $(5|2) \in G_f$. Aus
$$f'(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 25x + \frac{633}{4}$$
folgt
$$f''(x) = -x^2 + 10x - 25 = -(x-5)^2 \leq 0.$$
Also wechselt f'' nie das Vorzeichen und es gilt $f''(5) = 0$.