Flächen zwischen Graphen (1. Beispiel)

Alfred Reich (zehnp@gmx.de)

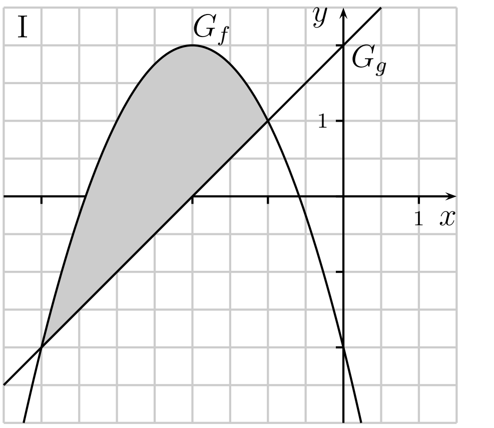
Ludwigsgymnasium Straubing

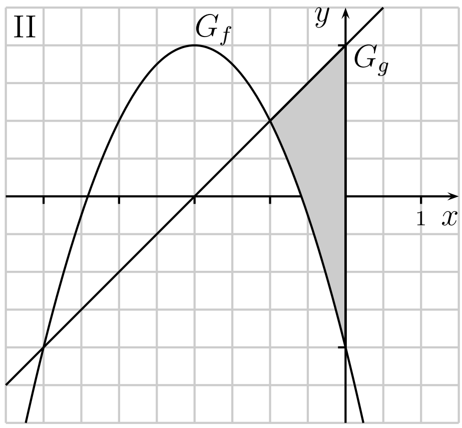
1. November 2011

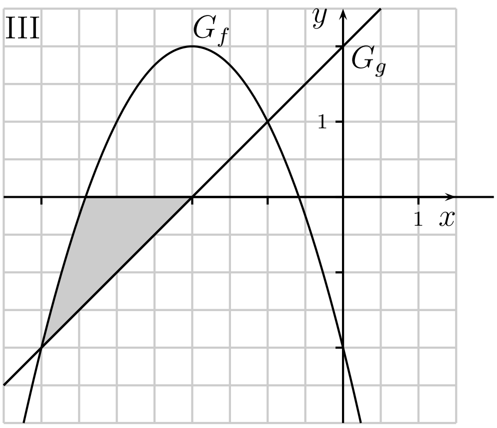
Gegeben sind - vergleiche auch delta 12, C. C. Buchner, Seite 49/1 - die Funktionen

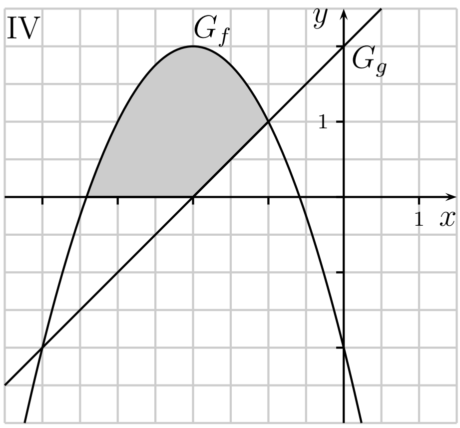
$$f : x \mapsto 2 - (x+2)^2,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : x \mapsto x+2,\ \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$$

mit ihren Graphen G_f und G_g.









Aufgabe. G_f und G_g schließen ein (endliches) Flächenstück ein, vergleiche Skizze I. Berechne dessen Inhalt.

Lösung. G_f und G_g schneiden sich in $(-4\,|-2)$ und $(-1\,|\,1)$. Wegen

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{-1}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,dx &= \int_{-4}^{-1}(-x^2-5x-4)\,dx\\
&= \left[\frac{x^3}{-3}+\frac{5x^2}{-2}-4x\right]_{-4}^{-1}\\
&= \left(\frac{-1}{-3}+\frac{5}{-2}+4\right)-\left(\frac{-64}{-3}+\frac{80}{-2}+16\right)\\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

hat das Flächenstück den Inhalt $\frac{9}{2}$.

Aufgabe. Die y-Achse, G_g und G_f schließen ein (endliches) Flächenstück ein, vergleiche Skizze II. Berechne dessen Inhalt.

Lösung. G_g schneidet die y-Achse in $(0\,|\,2)$ und G_f in $(-1\,|\,1)$. G_f schneidet die y-Achse in $(0\,|-2)$. Wegen

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0}\Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx &= \int_{-1}^{0}(x^2+5x+4)\,dx\\
&= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}\\
&= \left(\frac{0}{3}+\frac{0}{2}+0\right)-\left(\frac{-1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)\\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

hat das Flächenstück den Inhalt $\frac{11}{6}$.

Aufgabe. G_f, G_g und die x-Achse beranden ein unterhalb der x-Achse liegendes Flächenstück, vergleiche Skizze III. Berechne dessen Inhalt.

Lösung. Wegen $f(x) = -x^2-4x-2$ schneidet G_f die x-Achse in den Punkten $(-2-\sqrt{2}\,|\,0)$ und $(-2+\sqrt{2}\,|\,0)$. G_g schneidet die x-Achse in $(-2\,|\,0)$.

- Die Gerade $x=-4$, G_g und die x-Achse beranden ein (rechtwinkliges) Dreieck.
- Die Gerade $x=-4$, G_f und die x-Achse beranden ein (unterhalb der x-Achse liegendes) Flächenstück.
- Wenn wir vom Dreieck dieses Flächenstück abschneiden, erhalten wir das Flächenstück, dessen Inhalt wir berechnen wollen.

Wegen

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\int\limits_{-4}^{-2-\sqrt{2}}(-f(x))\,dx=2+\int\limits_{-4}^{-2-\sqrt{2}}f(x)\,dx$$

$$=2+\left[\frac{x^3}{-3}-2x^2-2x\right]_{-4}^{-2-\sqrt{2}}$$

$$=2+\left(\frac{(2+\sqrt{2})^3}{3}-2(2+\sqrt{2})^2+2(2+\sqrt{2})\right)-\left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$=2+\left(-\frac{4}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\approx 1{,}44772$$

hat das Flächenstück den Inhalt $\frac{10}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

Aufgabe. Die x-Achse, G_g und G_f beranden ein oberhalb der x-Achse liegendes Flächenstück, vergleiche Skizze IV. Berechne dessen Inhalt.

Lösung. Natürlich lässt sich der gesuchte Inhalt ganz einfach mit Hilfe unserer bisherigen Ergebnisse angeben. Wir wollen ihn aber mit einer eigenständigen Rechnung bestimmen.
Der Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist $(-2-\sqrt{2}\,|\,0)$.
Der Schnittpunkt von G_f mit G_g ist $(-1\,|\,1)$.
Der Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse ist $(-2\,|\,0)$.
Die Gerade $x=-2$ teilt das Flächenstück in zwei Teilflächen. Von jeder dieser Teilflächen lässt sich der Inhalt leicht berechnen.

$$\int\limits_{-2-\sqrt{2}}^{-2}f(x)\,dx+\int\limits_{-2}^{-1}\Big(f(x)-g(x)\Big)dx=\int\limits_{-2-\sqrt{2}}^{-1}f(x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2-2x\right]_{-2-\sqrt{2}}^{-1}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\approx 3.05228$$

Das Flächenstück hat also den Inhalt $\frac{7}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3}$.