

Eine ganzrationale Funktion vom Grad 5

Alfred Reich
Ludwigsgymnasium Straubing

4. Oktober 2011

Erinnerung: Jede Funktion f mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, deren Funktionsterm $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit geeigneten $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 5$ und $a_5 \neq 0$ schreiben läßt, heißt *ganzrationale Funktion vom Grad 5*.

Aufgabe (vergleiche delta 12, C. C. Buchner Verlag, Seite 14/6): Zeige, dass alle Wendepunkte des Graphen der Funktion

$$f : x \mapsto -\frac{3}{20}x^5 + 2x^3 - 5x - 2, \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

auf einer Geraden liegen.

Lösung: Wir denken daran, dass die Wendestellen von f genau die Nullstellen von f'' mit ungerader Vielfachheit sind. Mit

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 6x^2 - 5 \quad \text{folgt} \quad f''(x) = -3x^3 + 12x.$$

Wegen

$$-3x^3 + 12x = -3x(x^2 - 4) = -3x(x - 2)(x + 2)$$

hat f'' genau drei jeweils einfache Nullstellen, nämlich

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2.$$

Wegen

$$f(0) = -2 \quad \text{und} \quad f(2) = -\frac{4}{5} \quad \text{und} \quad f(-2) = -\frac{16}{5}$$

hat der Graph G_f von f also genau die drei Wendepunkte

$$W_1\left(0 \mid -2\right) \quad \text{und} \quad W_2\left(2 \mid -\frac{4}{5}\right) \quad \text{und} \quad W_3\left(-2 \mid -\frac{16}{5}\right).$$

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. g sei die Gerade durch W_1 und W_2 . Wegen

$$\frac{-\frac{4}{5} - (-2)}{2 - 0} = \frac{3}{5}$$

hat g die Steigung $\frac{3}{5}$ und (sowieso) den y -Achsenabschnitt -2 , also gilt:

$$g : y = \frac{3}{5}x - 2.$$

Wegen

$$\frac{3}{5} \cdot (-2) - 2 = -\frac{16}{5}$$

liegt auch W_3 auf g . Fertig.

