Eine anspruchsvolle (?) Aufgabe

Alfred Reich (zehnp@gmx.de)
Ludwigsgymnasium Straubing

7. November 2011

Aufgabe. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen, die mit ihrer 11-fachen Quersumme übereinstimmen.

Hinweis. Wenn $n \in \mathbb{N}$ und

$$n = \sum_{i=0}^{k} (a_i \cdot 10^i) \quad \text{mit } 0 \leq a_i \leq 9 \text{ für } 0 \leq i \leq k-1 \text{ und } 1 \leq a_k \leq 9 \tag{1}$$

die Darstellung von n im Dezimalsystem ist, so verstehen wir unter ihrer Quersumme $q(n)$ die Summe ihrer Ziffern, also

$$q(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i. \tag{2}$$

Wir müssen also alle Lösungen der Gleichung

$$q(n) \cdot 11 = n \tag{3}$$

finden.

Frage. Vielleicht weiß ein Leser, aus welchem Wettbewerb diese Aufgabe stammt?

Mit zwei so genannten Hilfssätzen können wir unsere Lösung vereinfachen.

Hilfssatz 1. Für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ gilt: $10^k + 99 < 10^{k+1}$.

Beweis (vollständige Induktion).

Induktionsbeginn $k = 2$: $10^2 + 99 = 199 < 1000 = 10^{2+1}$.

Induktionsannahme $10^k + 99 < 10^{k+1}$.
Induktionsschritt $k \to k+1$: $10^{k+1} + 99 = 10 \cdot 10^k + 99 < 10 \cdot 10^k + 990$
$= 10(10^k{+}99) < 10{\cdot}10^{k+1} = 10^{(k+1)+1}$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. Für alle $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ gilt: $99(k+1) < 10^k$.

Beweis (vollständige Induktion).

Induktionsbeginn $k = 3$: $99 \cdot (3+1) = 396 < 1000 = 10^3$
Induktionsannahme $99(k+1) < 10^k$
Induktionsschritt $k \to k+1$: $99((k+1)+1) = 99(k+1) + 99$
$< 10^k + 99 < 10^{k+1}$.

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. Für alle $n > 999$ gilt: $q(n) \cdot 11 < n$.

Beweis. Wenn

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$$

die Dezimaldarstellung von n ist, so gilt $k \geq 3$, insbesondere ist Hilfssatz 2 anwendbar. Damit:

$$\begin{aligned} q(n) \cdot 11 &= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right) \cdot 11 \leq \left(\sum_{i=0}^{k} 9\right) \cdot 11 \\ &= (k+1) \cdot 9 \cdot 11 = 99(k+1) < 10^k \\ &\leq a_k 10^k \leq \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i = n \end{aligned}$$

Folgerung. Wenn n Lösung von (3), dann gilt $n \leq 999$.

Hilfssatz 4. Unter allen 3−stelligen Zahlen ist $n = 198$ die einzige Lösung von (3).

Beweis. Auf jeden Fall ist $n = 198$ Lösung von (3), denn:

$$198 = 11 \cdot 18 = 11(1 + 9 + 8).$$

Wenn aber umgekehrt n mit der Dezimaldarstellung $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2$

eine Lösung von (3) ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} a_0 + 10a_1 + 100a_2 &= 11(a_0 + a_1 + a_2) \\ 89a_2 &= a_1 + 10a_0 \qquad \text{mit } 0 \leq a_0, a_1, a_2 \leq 9 \text{ und } a_2 > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn $a_2 \geq 2$, dann hat (4) keine Lösung. Also muss $a_2 = 1$ gelten. Und damit folgt $a_1 = 9$ und $a_0 = 8$.

Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Hilfssatz 5. Keine 2-stellige Zahl erfüllt (3).

Beweis. Mit $n = a_0 + 10a_1$ hätten wir:

$$a_0 + 10a_1 = 11(a_0 + a_1) \iff 0 = 10a_0 + a_1. \tag{5}$$

Aber $10a_0 + a_1 \geq a_1 > 0$, also hätten wir einen Widerspruch.

Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Weil aber auch keine 1-stellige Zahl (3) erfüllt, haben wir gezeigt, dass (3) genau eine Zahl, nämlich 198 als Lösung hat.