Funktionen mit stetig hebbarer Definitionslücke

Alfred Reich
Ludwigsgymnasium Straubing

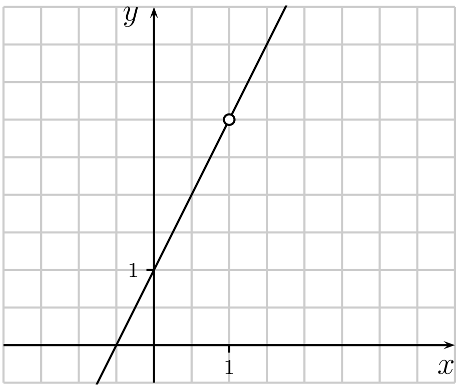
19. Oktober 2011

Definition: Eine Definitionslücke x_0 einer Funktion $f : x \mapsto f(x)$, $x \in \mathbb{D}_f$ heißt stetig hebbar, wenn der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Beispiel: $f : x \mapsto \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ hat die Definitionslücke $x_0 = 1$. Wegen

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

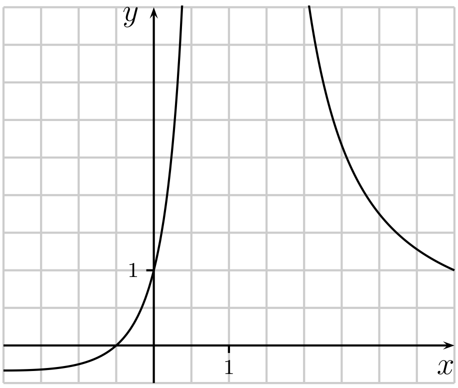
ist $x_0 = 1$ eine stetig hebbare Definitionslücke.



Beispiel: $f : x \mapsto \frac{2x^2-x-1}{(x-1)^3}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ hat die Definitionslücke $x_0 = 1$. Wegen

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \infty$$

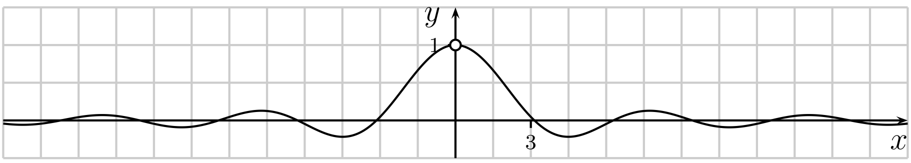
existiert der Grenzwert nicht, also ist $x_0 = 1$ keine stetig hebbare Definitionslücke.



Beispiel: $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat die Definitionslücke $x_0 = 0$. Wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

existiert der Grenzwert, also ist $x_0 = 0$ eine stetig hebbare Definitionslücke.



Beispiel: $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat die Definitionslücke $x_0 = 0$. Wegen

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

existiert der Grenzwert, also ist $x_0 = 0$ eine stetig hebbare Definitionslücke.