

Integrale der Form $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 2(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 + a^2)^2}$

Alfred Reich (zehnp@gmx.de)

Ludwigsgymnasium Straubing

1. November 2011

Satz. Für alle $0 \leq a < b$ gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 2(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4b}.$$

Beweis. $f_{a,b}$ bezeichne im Folgenden die durch

$$f_{a,b}(z) := \frac{z^2}{z^4 + 2(b^2 - a^2)z^2 + (b^2 + a^2)^2} \quad (1)$$

gegebene meromorphe Funktion. Weil der Nenner von $f_{a,b}(z)$ für $z \in \mathbb{R}$ nur positive Werte annimmt und der Grad des Zählers in $f_{a,b}(z)$ 2 ist und der Grad des Nenners in $f_{a,b}(z)$ 4 ist, existiert das uneigentliche Integral.

Den Wert des uneigentlichen Integrals bestimmen wir in mehreren Schritten.

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f_{0,b}(z) = \frac{z^2}{z^4 + 2b^2z^2 + b^4} = \frac{z^2}{(z^2 + b^2)^2} = \frac{z^2}{(z + ib)^2(z - ib)^2} \quad (2)$$

und $f_{0,b}(-z) = f_{0,b}(z)$.

2. Für alle $b > 0$ ist die durch $g(z) := \frac{z^2}{(z+ib)^2}$ auf $z \neq -ib$ gegebene Funktion g holomorph mit $g'(z) = \frac{2ibz}{(z+ib)^3}$. Insbesondere gilt:

$$g'(ib) = -\frac{i}{4b} \quad (3)$$

3. Wegen

$$f_{0,b}(z) = \frac{g(z)}{(z - ib)^2}$$

hat $f_{0,b}$ in ib einen Pol der Ordnung 2. Für das Residuum $\text{res}_{ib} f_{0,b}$ von $f_{0,b}$ in ib gilt:

$$\text{res}_{ib} f_{0,b} = g'(ib) = -\frac{i}{4b} \quad (4)$$

Die Funktion $f_{0,b}$ hat nur ib als Polstelle mit positivem Imaginärteil. Also gilt:

$$\pi i \sum_{\Im(\zeta) > 0} \operatorname{res}_{\zeta} f_{0,b} = \frac{\pi}{4b} \quad (5)$$

4. Nach dem Residuensatz folgt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{4b} \quad (6)$$

Damit ist der Satz für $a = 0$ bewiesen.

Im folgenden gilt $0 < a < b$. Wir setzen $w := a + ib$.

5. Dann gilt:

$$w^2 = a^2 - b^2 - 2iab \quad (7)$$

$$\bar{w}^2 = a^2 - b^2 + 2iab \quad (8)$$

$$w^2 + \bar{w}^2 = 2(a^2 - b^2) \quad (9)$$

$$(w\bar{w})^2 = w^2\bar{w}^2 = (a^2 + b^2)^2 \quad (10)$$

6. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(z - w)(z - \bar{w})(z + w)(z + \bar{w}) = (z^2 - w^2)(z^2 - \bar{w}^2) \quad (11)$$

$$= z^4 - (w^2 + \bar{w}^2)z^2 + (w\bar{w})^2 \quad (12)$$

$$= z^4 + 2(b^2 - a^2)z^2 + (a^2 + b^2)^2 \quad (13)$$

Insbesondere hat $f_{a,b}$ die vier (jeweils einfachen) Polstellen $\pm w$ und $\pm \bar{w}$. Von diesen Polstellen haben genau w und $-\bar{w}$ positiven Imaginärteil.

7. Wenn h die durch

$$h(z) := \frac{z^2}{(z^2 - \bar{w}^2)(z + w)}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{-w, \bar{w}, -\bar{w}\}$ gegebene holomorphe Funktion ist, dann gilt:

$$f_{a,b}(z) = \frac{h(z)}{z - w}.$$

Damit folgt:

$$\operatorname{res}_w f_{a,b} = h(w) = \frac{w^2}{(w^2 - \bar{w}^2)(w + w)} = \frac{w}{8iab} \quad (14)$$

8. Wenn k die durch

$$k(z) := \frac{z^2}{(z^2 - w^2)(z - \bar{w})}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{w, -w, \bar{w}\}$ gegebene holomorphe Funktion ist, dann gilt:

$$f_{a,b}(z) = \frac{k(z)}{z + \bar{w}}.$$

Damit folgt:

$$\operatorname{res}_{-\bar{w}} f_{a,b} = k(-\bar{w}) = \frac{w^2}{(\bar{w}^2 - w^2)(-\bar{w} - \bar{w})} = \frac{\bar{w}}{8iab} \quad (15)$$

9. Damit ergibt sich:

$$\pi i \sum_{\Im(\zeta) > 0} \operatorname{res}_{\zeta} f_{a,b} = \pi i \left(\frac{w}{8iab} + \frac{\bar{w}}{8iab} \right) = \pi i \left(\frac{2a}{8iab} \right) = \frac{\pi}{4b} \quad (16)$$

10. Wieder folgt nach dem Residuensatz und wegen $f_{a,b}(-z) = f_{a,b}(z)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 2(b^2 - a^2)x^2 + (b^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4b}. \quad (17)$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Im Folgenden wollen wir unseren Satz anwenden.

Aufgabe. Berechne:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 13}$$

Lösung. Wir suchen $0 \leq a < b$ mit:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 = 3 \quad \text{und} \quad (b^2 + a^2) &= \sqrt{13} && \iff \\ b^2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{und} \quad a^2 &= \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} && \iff \\ b = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}} \quad \text{und} \quad a &= \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}} \end{aligned}$$

Also ist unser Satz anwendbar und liefert:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{4\sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2\sqrt{13} - 6}}{8} \approx 0,43217 \quad (18)$$

Hinweis. Diese Aufgabe findet sich zum Beispiel in Funktionentheorie, Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, Vieweg, ISBN 3-528-67247-1, Seite 130/3b.

Beispiel. Mit $a = 1$ und $b = 2$ erhalten wir:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 25} = \frac{\pi}{8} \quad (19)$$

